

УДК 621.891+539.375.6

DOI: 10.18372/0370-2197.4(105).19386

Ю.О.МАЛІНОВСЬКИЙ<sup>1</sup>, О.А.МІКОСЯНЧИК<sup>2</sup>, Д.П.ВЛАСЕНКОВ<sup>1</sup>,  
С.О.СИТНИК<sup>1</sup>, Д.П.РИБАК<sup>1</sup>, С.Ю.ОЛІЙНИК<sup>3</sup>, Н. М. БЕРЕЗІВСЬКИЙ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», Кривий Ріг, Україна

<sup>2</sup>Національний авіаційний університет

<sup>3</sup>Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна

## ПАРАМЕТРИЧНІ Й АВТОКОЛИВАЛЬНІ ПРОЦЕСИ В ПОВЕРХНЕВИХ ШАРАХ ДЕТАЛЕЙ ЯК ЗОВНІШНІ ДЖЕРЕЛА ЇХНЬОГО РУЙНУВАННЯ ПІД ЧАС ТЕРТЯ І ЗНОШУВАННЯ

У процесі виконання різних технологічних процесів і роботи виконавчих механізмів широкого призначення може мати місце прояви рухів коливального характеру, які збуджуються без джерела коливального руху. Ці коливання зазвичай проявляються або на майданчику контакту двох деталей, або в зоні, що знаходиться попереду від передньої кромки рухомої деталі. Коливальний характер рухів у зоні контакту деталей і зоні розташованої попереду кромки рухомої деталі мають різну фізичну природу. Так, у зоні взаємодії деталей (на майданчику контакту) мають місце рухи коливального характеру завдяки нестационарній характеристиці тертя, яка залежить від швидкості прослизання деталей. За певних співвідношень швидкостей прослизання автоколивальні рухи можуть проявлятися або зникати, а також посилюватися або послаблюватися. Ці коливання є однією з причин виникнення нерегламентованих шорсткостей, (деформаційних) тріщинуватостей і луцення деталей, що взаємодіють, а також значних динамічних складових під час навантаження виконавчих, приводних і силових механізмів. Автоколивання в поверхневих шарах деталей із деформаційним хвилеутворенням, що призводить до подальшого руйнування в цих шарах, попереду від передньої крайки штампам через утворення залишкових пластичних хвиль і подальше руйнування їхніх гребенів. Через динамічний характер взаємодії деталей під час тертя, зусилля, що діє на лінії контакту штампам і протяжної деталі, перевищує критичне зусилля Ейлера і фактично є параметричним навантаженням, що супроводжується явищем параметричного резонансу, який зазвичай має небезпечніший ефект, ніж звичайний резонанс під час вимушених коливань. Тому руйнування поверхневого шару деталей за параметричного резонансу більш суттєві. Головна частота коливань, за якої виникає параметричний резонанс, дорівнює подвоєній частоті згинальних коливань балки-смушки. Область частот поблизу частоти параметричного резонансу є головною областю динамічної нестійкості попереду рухомого штампам.

У викладеній задачі розглянуто фрикційні автоколивання в зоні під штампом, які є джерелом втрати динамічної стійкості в області перед штампом, розвитку параметричних коливань поверхневих шарів деталей і низки випадків виникнення параметричних коливань і параметричного резонансу зовнішніх шарів деталей, які руйнуються при взаємодії. Зв'язок між фрикційними і параметричними коливаннями встановлюються через дві суміжні ділянки балки-смушки в її розтягнутій і стиснутій частинах.

**Ключові слова:** тертя, знос, фрикційні коливання, автоколивання, балка-смушка, параметричні коливання, параметричний резонанс, головна область

*нестійкості, штамп, протяжна деталь, сила тертя, швидкість, прослизання, поверхневі шари.*

**Вступ.** Під час розгляду різноманітних технологічних процесів, що відбуваються в зоні контактування різноманітних деталей, мають місце прояви рухів коливального характеру, що призводять до місцевого руйнування, супроводжуваного фрикційними коливаннями, що найчастіше мають переривчастий та нерівномірний рух, що супроводжується звуковим фоном. Зазначимо, що ці коливання відбуваються з частотами власних коливань пружних систем.

Крім цих коливань, що мають місце в ділянці взаємодії деталей під штампом, в ділянці перед штампом реалізуються пластичні деформації, що проявляються в результаті розвитку параметричних коливань і параметричного резонансу в поверхневих шарах деталей (у зоні, що розміщена попереду від діючого штампа), із частотами, що відрізняються від власних частот коливань деталей, які розглядаються.

Зовні ці деформації можуть мати незворотний характер, тобто проявити пластичні властивості, що зустрічається в зоні частот розвитку параметричного резонансу. У такому разі, прояв параметричного резонансу є більш небезпечним процесом, ніж автоколивання в умовах тертя та зношування.

**Метою роботи** є дослідження причин виникнення та стабілізації самозбуджувальних і параметричних коливань, які виникають у ділянці взаємодії деталей під час тертя та зношування.

Розглянемо механізм виникнення фрикційних автоколивань у зоні взаємодії штампа (прямокутної або циліндричної форми з балкою-смушкою на протяжній деталі). Балка-смушка уявляється зовнішньою поверхнею однорідної деталі з ущільненим, напиленим, загартованим або накатаним шаром. У нашій постановці протяжні деталі можна розглядати у вигляді двошарового композитного елемента, який взаємодіє зі штампом (двошаровим композитним або однорідним елементом).

### **Виклад основного матеріалу**

У процесі взаємодії двох деталей має місце контактування довшої деталі з коротшою (штампом). На довжині штампа розглядаємо ділянку протяжної деталі. Ця ділянка балки-смушки під штампом навантажена розподіленим вертикальним навантаженням  $\bar{p}$  (сумарне навантаження  $P$ ) і в результаті дії сили тертя  $T$  схильна до деформації – розтягування. У початковій точці взаємодії штампа з балкою-смушкою в т.  $A$ , рис. 1, спостерігається гальмування і поворот штампа відносно центру своєї тяжкості і точки входження штампа в балку-смушку, відносно його ребра перекиду. За такої схематизації, ділянка балки-смушки над штампом перебуває в зоні розтягування, а правіше від точки  $A$  (рис. 1) – у зоні стиснення. Тому для опису випадку фрикційних коливань під штампом розглянемо розтягнуту ділянку довжиною  $l_1$  (під штампом) і стиснуту ділянку балки-смушки перед рухомим штампом довжиною  $l_2$ , причому довжина ділянки  $l_2$  поки що не відома.

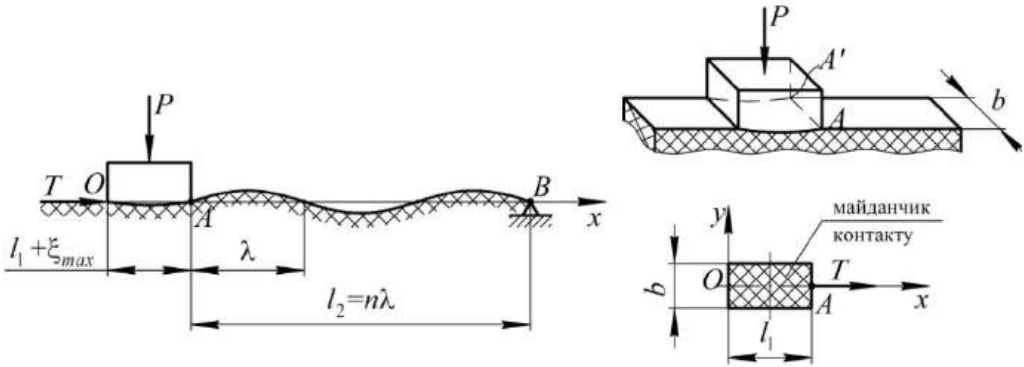


Рис. 1. Взаємодія штампа з напівпростором

Втрата поздовжньої стійкості поверхневих шарів під дією сили  $T$ :

т.  $A$  – ребро перекидання штампа;

$OA = l_1$  – довжина майданчика контакту деталей;

$AB = l_2$  – довжина ділянки балки-смужки, що втратила поздовжню стійкість.

Під рухомими взаємодіючими деталями знаходяться шорсткі поверхні, де відбувається їхній фрикційний контакт.

Сила тертя між двома деталями, що контактують, як це впливає з теорії макромоделей, може бути апроксимована, як лінійною функцією швидкості прослизання, так і більш точно, кубічною функцією швидкості прослизання. Причому, зазначена характеристика тертя (рис. 2) може мати спадаючу ділянку. Це свідчить про те, що на гілці спадаючої ділянки тертя виникає надходження енергії за рахунок перетворення і розсіювання енергії рухомих деталей.

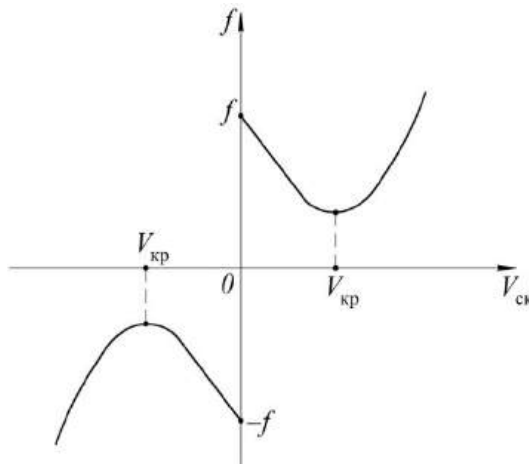


Рис. 2. Залежність коефіцієнта сили тертя від швидкості ковзання деталей

$V_{кр}$  – критична швидкість ковзання;

$V_{ск}$  – швидкість ковзання.

Ця енергія виходить від зовнішнього джерела неколивального характеру, видозмінюється і йде на розвиток автоколивального процесу.

Характеристика тертя, що має поєднання лінійної та кубічної ділянок, як функція швидкості відносного ковзання деталей, свідчить про те, що в

коливальній системі фрикційної пари проявляється від'ємне демпфірування, що призводить до розвитку самозбуджувальних коливань.

Причому від'ємне демпфірування в коливальній системі призводить до самозбудження наростаючих коливань, доти, доки швидкість взаємного прослизання деталей не досягне свого критичного значення. (рис. 2) [1].

Наявність же нелінійного (кубічного) доданка свідчить про те, що після досягнення швидкістю ковзання свого критичного значення  $V_{кр}$  вплив нелінійного доданка зростатиме, а отже, амплітуди коливань, що наростають, знижуватимуться.

Так проявляється феноменологічний аспект самозбудження і стабілізації фрикційних автоколивань.

Розглянутий підхід узгоджується з точкою зору авторів [2], про те, що сила і коефіцієнт тертя складається з постійної  $f_0$  і змінної частини  $f_1$ , що змінюється за періодичним законом. Як впливає з [1], сила тертя зумовлена взаємним прослизанням зовнішніх шарів деталей, і за цього характеристика тертя має спадний характер, то тертя супроводжується автоколивальним процесом, що сприяє виникненню додаткового опору тертю та інтенсифікації втомного зносу взаємодіючих поверхонь.

За даними проведених досліджень було сформульовано три задачі з теорії тертя і зносу стосовно валків прокатних станів у процесі прокатування листів під час оброблення металів тиском (та інших аналогічних процесах):

1. Тертя і знос оброблюваних поверхонь під дією дотичних сил, раптово прикладених до зовнішніх шарів оброблюваної деталі.
2. Тертя і знос оброблюваних поверхонь під час навантаження зовнішніх шарів деталей періодичним дотичним навантаженням.
3. Тертя і знос оброблюваних поверхонь унаслідок дії дотичного навантаження, зумовленого нестационарним тертям між формотворчим інструментом і деталлю.

Сформульовані (і частково розв'язані) задачі є задачами з феноменологічними моделями представлення процесів тертя і зношування.

**Перша задача** фактично є задачею про взаємодію мікронерівностей на деталях, що контактують, причому сили взаємодії прикладаються раптово, і діють протягом дуже короткого проміжку часу. Так, за першою задачею кожна з пар мікронерівностей, що взаємодіють, перебуває під впливом імпульсної сили невеликої величини, і діє протягом дуже короткого проміжку часу.

Такий характер взаємодії мікронерівностей створює постійний в зоні контакту деталей, який формує і накладається на власні коливання цих деталей (створює спектр власних частот коливань деталей).

Колівання, що формуються, за виглядом є власними, і зумовлені термодформаційними ефектами під час взаємодії мікронерівностей (як деформаційних, так і геометричних).

Фактично відбувається мікрозхоплення при високотемпературних мікроспалахах взаємодіючих мікро нерівностей з утворенням мікростітків зварювання, які тут же руйнуються. При цьому кінетична енергія руху деталей частково витрачається на мікрозхоплення і подальше руйнування цих мікронерівностей. Частина енергії на розгойдування автоколивань фактично запозичується з енергії руху взаємодіючих деталей.

**Друга задача** пов'язана з першою – так під час взаємодії автоколивачів у деталях, що контактують, присутні як постійні, так і змінні (гармонійні) складові. Таким чином, на постійну складову дотичної сили, прикладену до ділянки балки-смушки, накладається довільна періодична або синусоїдальна складова величина (задачі Мат'є-Хілла і Мат'є) для ділянки балки-смушки перед рухомим штампом.

Розглядаючи ділянки взаємодії деталей під штампом і перед штампом можна виділити такі особливості ділянки перед штампом (рис. 1).

У лівій крайній точці ділянки під штампом умовно вміщено пружну опору, що перешкоджає переміщенню балки-смушки зі штампом, водночас ця опора перешкоджає фрикційному переміщенню ділянки балки-смушки в бік руху штампа. Тоді фрикційне зміщення балки-смушки в бік руху штампа здійснюється від нульового переміщення в т.  $O$  (опора  $O$ ) до величини  $\xi_{max}$  у точці ділянки балки-смушки  $A$ .

Переміщення в т.  $A$  можна визначити згідно з [3] за формулою

$$\xi_{max} = \frac{T^2}{2f\bar{p}EF}, \quad (1)$$

де:  $T$  – дотична сила, що розтягує майданчик контакту під штампом;  $f$  – коефіцієнт тертя між балкою-смушкою і шорсткою основою;  $\bar{p}$  – тиск, прикладений до смушки, який передається шорсткою поверхнею;  $EF$  – жорсткість балки-смушки при розтягуванні.

Зміщення (розтягнення) смуги під дією зусилля  $T$  (от 0 до  $T_{max}$ ) викликає поздовжнє стиснення ділянки попереду штампа, тим самим зусиллям на величину  $\xi_{max}$ . Ділянка балки-смушки попереду штампа отримує прирощення  $\xi_{max}$  у результаті деформації (зміни) своєї прямолінійної форми на синусоїдальну.

При цьому залишаються поки що невідомими довжина хвилі деформації (напівхвилі); висота гребеня синусоїди; кількість напівхвиль на довжині ділянки балки-смушки, що втратила стійкість (або перед втратою стійкості). Перераховані параметри визначають статичні показники балки-смушки, що втратила стійкість.

Під час побудови профілю зігнутої осі балки-смушки виходимо з того, що ділянка балки-смушки під штампом ( $l_1$ ) подовжилася на величину  $\xi_{max}$ , водночас, на ту саму величину подовжується ділянка балки-смушки  $l_2$ , при цьому відстань між опорами умовної балки  $l_2$  залишилася тією самою, тільки ділянка  $l_2$  набула синусоїдальної форми і подовжилася по дузі на величину  $\Delta l_2 = \xi_{max}$ .

Строго кажучи, як впливає з постановки задачі 2, це питання передбачає ще й наявність динамічної постановки (поки що обмежимося статичним і квазістатичним варіантами задачі).

Як показує практика розв'язання задач з оброблення металів тиском [4], під час взаємодії штампа і протяжності деталі на макро- або мікрорівнях виникає питання щодо самозбудження фрикційних автоколивачів у ділянці під штампом (у процесі його руху).

**Третє завдання** є завданням, у якому дотична сила тертя зумовлена особливостями фрикційної взаємодії деталей як функції їхньої відносної швидкості.

Цілком ймовірно, сила тертя ковзання на майданчику контакту, автоколювання, що виникають, і параметричні ефекти в області перед штампом між собою певним чином пов'язані. Тому для опису взаємозв'язку процесів на майданчику контакту і перед штампом розглянемо ці дві суміжні ділянки на балці-смужці. Виділимо окремо коливальні (і автоколивальні) процеси на майданчику контакту в зоні розтягування, де дотична сила є функцією швидкості відносного ковзання деталей під час тертя. Визначимо цю силу в крайній точці перед штампом т.  $A$  (рис. 1) і прикладемо її до початкової точки балки-смужки в області перед штампом.

З метою розгляду можливості виникнення фрикційних і параметричних коливань на балці-смужці розглянемо майданчик під штампом, де можуть мати місце поздовжні коливання, що збуджуються у зв'язку з присутністю нестационарного тертя (рис. 1), т.  $A$ . Під час переходу через точку  $A$ , у бік руху штампа, зусилля тертя змінює знак, і вже на ділянці ( $l_2$ ) балка-смужка відчуватиме деформацію стиснення в зоні, розташованій попереду від штампа, в межах ділянки балки-смужки, яка може втратити поздовжню стійкість.

Причому ці два види деформацій будуть пов'язані через силу тертя (деформації розтягування і поздовжнього вигину).

Розглянемо окремо деформацію розтягування балки-смужки в області під штампом (ділянки  $l_1$ ) і деформацію стиснення ділянки  $l_2$ .

На протяжній (смужкою) деталі можна виділити ділянки взаємодії зі штампом (майданчик контакту). Майданчик контакту, як кінцевий елемент штампа, вступає у взаємодію з аналогічною зоною на протилежній деталі. Залежно від характеру взаємодії мікронерівностей (а також їхньої висоти, жорсткості, ступеня припрацювання) можливе виникнення автоколювань у деталях як функцій швидкісного фактора (або енергетичного).

Автоколювання, що виникають, можна пояснити, як на мікро-, так і макрорівнях (під час ударної взаємодії мікронерівностей), де кінетичної енергії пружних зіткнень мікронерівностей достатньо для збудження коливань рухомої пари. У разі пластичного зіткнення мікронерівностей частини кінетичної енергії зіткнення достатньо для погашення частки кінетичної енергії автоколювань. Тому вплив швидкісного фактора є суттєвим під час триботехнічних розрахунків.

Зазначимо, що частина кінетичної енергії під час взаємодії деталей реалізується у вигляді роботи сили тертя (її постійної частини  $T_0$ ), на яку накладаються природи змінних сил тертя ( $T_1$ ), в результаті виникнення і розвитку автоколивальних процесів. Ці сумарні дотичні зусилля  $T_0 + T_1$  спричиняють нерівномірне розтягнення майданчика контакту. Унаслідок прояву особливостей мікро- і макромоделей тертя, сумарне дотичне зусилля, що розтягує,  $T$  складається з постійної та змінної (полігармонійної) частин.

У процесі подальших досліджень автоколювань, крім максимального переміщення майданчика контакту  $\xi_{max}$ , необхідно визначити закон його переміщення під час автоколювань. З метою визначення переміщень майданчика контакту в умовах автоколювань складемо і розв'яжемо функціональні рівняння

його руху. Для цього розглянемо елемент майданчика контакту двох деталей з обрисами площини штампа (і протяжністю вздовж поздовжньої осі смуги –  $Ox$ ).

Розглянемо процес самозбудження поздовжніх коливань смуги, навантаженої розподіленим дотичним навантаженням (у довільній загальній постановці). Тут сила тертя представлена як нелінійна функція швидкості прослизання деталей.

Виходячи з цих міркувань складемо рівняння поздовжніх коливань балки-смужки, навантаженої розподіленим дотичним навантаженням уздовж осі  $Ox$  смуги, яка лежить на пружній основі Вінклера-Фусса [5]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{EF}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\beta}{m} \cdot y + \frac{q}{m}, \quad (2)$$

де:  $y = y(x, t)$  – поздовжнє зміщення балки-смужки під час її коливань;  $EF$  – поздовжня жорсткість балки-смужки;  $m$  – розподілена маса балки-смужки;  $\beta$  – коефіцієнт жорсткості пружної основи;  $q = \frac{T}{bl_1}$  – інтенсивність розподіленого навантаження по майданчику контакту поверхонь;  $b$  – ширина майданчика контакту;  $l_1$  – довжина майданчика контакту.

Для випадку навантаження поверхневого шару (на пружній основі) дотичним зусиллям  $T$  матимемо:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{EF}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\beta}{m} \cdot y + \frac{T}{bl_1 m}. \quad (3)$$

Далі уявімо зусилля  $T$  через зовнішнє вертикальне навантаження  $P$  і коефіцієнт тертя  $f$  у формі [1]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{EF}{m} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\beta}{m} \cdot y + \frac{P}{bl_1 m} \cdot \left[ f_0 - a \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^3 \right], \quad (4)$$

де:  $P$  – зовнішнє вертикальне навантаження на деталь;  $f_0$  – коефіцієнт тертя спокою;  $a = \frac{3(f_0 - f_{min})}{2V_{кр}}$  – лінійний коефіцієнт характеристики тертя;  $\bar{b} = \frac{(f_0 - f_{min})}{2V_{кр}^3}$  – нелінійний коефіцієнт характеристики тертя;  $V_{кр}$  – критична швидкість прослизання деталей, при якій  $f = f_{min}$ .

Коефіцієнт тертя між двома взаємодіючими деталями виразимо відповідно до кубічної залежності від швидкості прослизання [1]

$$f = f_0 - \frac{3}{2} \cdot (f_0 - f_{min}) \cdot \frac{\bar{V}}{V_{кр}} + \frac{1}{2} \cdot (f_0 - f_{min}) \cdot \left( \frac{\bar{V}}{V_{кр}} \right)^3, \quad (5)$$

де:  $\bar{V}$  – швидкість прослизання деталей.

Рівняння (3), (4) розглянемо з урахуванням однорідних граничних умов

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Вирази (6) являють собою граничні умови в зоні балки-смужки під штампом. Розв'язок (4) запишемо згідно з методом Фур'є, у такому вигляді:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot z(t), \quad (7)$$

де:  $Y(x)$  – частина рішення, що залежить тільки від  $x$  [5] (розв'язання рівняння форм поздовжніх коливань балки-смужки).



Точний розв'язок рівняння форм поздовжніх коливань майданчика контакту двох деталей, що взаємодіють, знайти складно, тому що не існує тригонометричної (гармонійної) функції, яка одночасно задовольняє ліву та праву частини рівняння (4). Тому знайдемо розв'язок укороченого рівняння (3) без урахування навантаження – сили тертя  $T$ , але з урахуванням граничних умов (6). Укорочений розв'язок (3) запишемо згідно з [5] у вигляді без правої частини з граничними умовами (6)

$$Y_1(x) = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right). \quad (8)$$

Розглядаючи розтягнення смуги під штампом, то при  $x = 0$   $C_1 = 0$ ; так як  $Y_1(0) = 0$ ;  $Y_1(l) = \xi_{max}$ , тоді

$$\xi_{max} = C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right),$$

звідки

$$C_2 = \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)}. \quad (9)$$

Отже

$$Y_1(x) = \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right). \quad (10)$$

Побудуємо наближений розв'язок (4), для цього скористаємося виразами (7) та (10).

Перший наближений розв'язок (4) отримаємо у вигляді:

$$y_1(x, t) = Y_1(x) \cdot z(t). \quad (11)$$

Як впливає з [6] при  $z(0) = z_0 = 0$ ;  $z'(0) = V_0$ .

Тоді часова функція (7) для виразу (4) матиме вигляд

$$z(t) = \frac{V_0}{p} \cdot \sin(pt). \quad (12)$$

Розв'язок укороченого рівняння отримаємо у вигляді (11).

Далі виразимо з рівняння (4)  $y(x, t)$  через похідні  $y''_{t-t}$ ;  $y''_{x-x}$ ;  $y'_t$ ;  $(y'_t)^3$ .

Для цього підставимо у вираз (4) значення похідних  $y_1(x, t)$ , отримане за першим наближенням (8), (12).

Таким чином, права частина (4) після підстановки  $y_1(x, t)$  являє собою наближений розв'язок дотичного зусилля  $T(x, t)$  з урахуванням сил інерції та пружності.

І тоді, використовуючи вирази (10), (11), (12) отримуємо наближений вираз шуканої функції  $y_1(x, t)$ , а вираз (4) перетворюється на вигляд:

$$y_1(x, t) = -\frac{m}{\beta} \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{EF}{\beta} \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{Pm}{bI\beta} \left[ f_0 - \alpha \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^3 \right]. \quad (13)$$

Використовуючи вираз для  $y_1$  і підставляючи його в (11) отримаємо



$$\begin{aligned}
 y(x, t) = & \frac{m}{\beta} \cdot PV_0 \cdot \sin(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right) - \frac{EF}{\beta} \times \\
 & \times \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)} \times \sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right) \cdot \frac{V_0}{p} \cdot \sin(pt) + \frac{Pm}{\beta b} \times \\
 & \times \left[ f_0 - aV_0 \cos(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right) + \bar{b}V_0 \cos(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)} \times \right. \\
 & \left. \times \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Розглядаючи вираз у квадратних дужках (права частина (14)) і аналогічні вирази у вихідному рівнянні (4), робимо висновок, що це дотичне навантаження на балку-смужку. Дотичне навантаження, що розтягує, на майданчику контакту складається з постійної, косинусоїдальної лінійної частини і косинусоїдальної нелінійної частини. Причому лінійна косинусоїдальна частина навантаження, у вихідному диференціальному рівнянні представляє від'ємне загасання, що призводить до виникнення і наростання самозбуджувальних коливань у системі.

**Механізм взаємодії та передачі навантаження** на ділянці  $l_2$  в околицях т. А (рис. 1) у місці переходу від майданчика контакту деталей під дією ваги верхньої деталі зникає обмежувач згинальної деформації під штампом, і далі правіше т. А, попереду від діючого штампа відбувається перехід від деформації розтягування ділянки під штампом до ділянки стиснення в зоні перед штампом. У передньому положенні штампа, під час його набігання на протяжну деталь відбувається стиснення балки-смужки під дією зусилля  $T$  (на довжині  $l_2$  попереду штампа).

Якщо сумарна величина дотичного зусилля перевершує критичну силу Ейлера [7], то балка-смужка попереду штампа отримує необоротну вигинову деформацію, і балка при цьому втрачає поздовжню стійкість у сенсі Ейлера. Причому стріла прогину балки-смужки попереду рухомого штампа не є нескінченно великою величиною, а є величиною обмеженою. Балка-смужка втрачає поздовжню стійкість перебуваючи в стані обмеженого стиснення смуги ( $l_2$ ), за рахунок обмеженого розтягування майданчика контакту в зоні розтягування взаємодії деталей. Ці міркування дають змогу визначити стрілу прогину балки-смужки в разі розтягування майданчика контакту під дією сили  $T$ , і відповідного стиснення з поздовжнім вигином балки-смужки попереду штампа (виходячи з елементарних міркувань).

**Визначення параметрів ділянки балки-смужки, що втратила поздовжню стійкість** ( $n, \lambda, \alpha, l_2$  для статичного навантаження).

Розглянемо елемент ділянки балки-смужки попереду від діючого штампа. До деформації цієї ділянки її довжина становить  $l_2$ , після деформації довжина деформованої ділянки по горизонтальній осі буде меншою на величину  $\xi_{\max}$  і складе  $l_2 - \xi_{\max}$  (рис. 3). Тобто внаслідок деформації навантаженого шару довжина гофрованої частини (по дузі кривої) залишилася незмінною, а довжина

по осях зменшилася. Для визначення стріли прогину гофрованої ділянки розглянемо деформовану ділянку, попереду штампа, для балки-смужки на цій ділянці виділимо криволінійний трикутник  $\Delta OLN$  сторона якого  $LN = \bar{A}$  і являє собою стрілу прогину деформованої ділянки попереду штампа. Під час розгляду криволінійного трикутника, не порушуючи суворості викладу, замінимо його трикутником із прямолінійними сторонами (через малість сторін трикутника помилка буде малою).

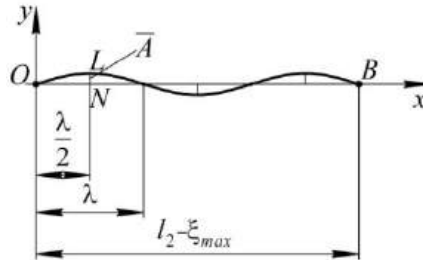


Рис. 3. Деформація балки-полоски ( $l_2 = \lambda n$ ) при втраті поздовжньої стійкості ( $l_{OB} = \lambda n - \xi_{max}$ )

Тоді будемо вважати

$$OL = \frac{l_2}{2n}, \quad ON = \frac{l_2 - \xi_{max}}{2n}.$$

У результаті перетворень отримаємо:

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{2l_2\xi_{max} + \xi_{max}^2}{4n^2}} = \sqrt{\frac{2l_2\xi_{max} + \xi_{max}^2}{2n}}. \quad (15)$$

У наведеному вираженні (15):

$\bar{A}$  – стріла прогину балки-смужки при втраті зовнішнім шаром поздовжньої стійкості;

$n$  – число напівхвиль синусоїди на деформованій ділянці (буде визначено виходячи зі співвідношення жорсткості пружної основи та згинальної жорсткості балки-смужки);

$\xi_{max}$  – переміщення точки  $B$  ділянки під штампом, формула (1).

Тоді стрілу прогину балки-смужки представимо у вигляді:

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{2l_2\xi_{max} + \xi_{max}^2}{2n}} = \sqrt{\frac{2\lambda n\xi_{max} + \xi_{max}^2}{2n}} = \sqrt{\frac{2\lambda n \frac{\Gamma^2}{2f\bar{p}EF} + \frac{\Gamma^4}{4f^2\bar{p}^2E^2F^2}}{2n}}, \quad (16)$$

де:  $f$  – коефіцієнт тертя між взаємодіючими деталями;

$\bar{p}$  – нормальний тиск на майданчику контакту.

Для визначення числа напівхвиль деформації на ділянці  $l_2$  стрижня, що втратив пружну стійкість, скористаємося уявленням про те, що жорсткість пружної основи  $\beta$ , віднесена до згинальної жорсткості балки-смужки  $EF$ , пов'язана з числом напівхвиль  $n$  і довжиною ділянки балки-смужки, що втратила пружну стійкість ( $r = \frac{\beta}{EI}$ ) [7].

Як впливає з [7] довжина напівхвиль стрижня, що втратив поздовжню стійкість, дорівнює:

$$\lambda = \frac{\pi}{\alpha} = \pi \cdot \sqrt[3]{\frac{4E_c I}{E}}, \quad (17)$$

де:  $\alpha$  – число напівхвиль деформації балки довжиною  $\pi$  ( $\alpha = \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}}$ );

$I$  – момент інерції поперечного перерізу балки-смужки (попереду від штампа, що рухається, т. А, рис. 1);

$E$  – модуль пружності глибинних шарів деталі;

$E_c$  – модуль пружності поверхневих шарів балки-смужки.

Далі звернемося до виразу:

$$r = \frac{\beta}{EI} = \frac{E\alpha}{2} = \frac{1}{2I} \cdot \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}} \quad (18)$$

Так як  $r = \frac{1}{2I} \cdot \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}}$  тоді запишемо:

$$\frac{1}{2I} \cdot \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}} = \frac{\pi^4}{l^4} n^4 (n+1)^2. \quad (19)$$

З огляду на те, що довжину балки-смужки, яка втратила стійкість, можна подати як добуток довжини напівхвилі деформації на число напівхвиль ділянки довжиною  $l$  ( $l_2$ ), то:

$$l = \lambda n. \quad (20)$$

Тоді (19) перепишемо у вигляді:

$$\frac{1}{2I} \cdot \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}} = \frac{\pi^4}{n^4 \pi^4} \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}} \right)^4 = \frac{1}{n^4} \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{E}{4E_c I}} \right)^4, \quad (21)$$

$$\frac{n^2}{2} = (n^2 + 2n + 1) \cdot \frac{E}{4E_c}, \quad (22)$$

$$n^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{E}{4E_c} \right) - 2n \cdot \frac{E}{4E_c} - \frac{E}{4E_c} = 0. \quad (23)$$

Розв'язавши (23) відносно  $n$ , отримуємо вираз для визначення кількості напівхвиль:

$$n = \frac{E}{4E_c} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{2} - \frac{E}{4E_c} \right)} + \sqrt{\frac{E^2}{16E_c^2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{2} - \frac{E}{4E_c} \right)^2} + \frac{E}{4E_c} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{2} - \frac{E}{4E_c} \right)}} = 0. \quad (24)$$

Далі використовуючи формулу (20) знаходимо довжину балки-смужки, що втратила поздовжню стійкість.

$$l = \lambda n = \pi \cdot \sqrt[3]{\frac{4E_c I}{E}} \cdot n. \quad (25)$$

Таким чином, довжина балки-смужки, що втратила поздовжню стійкість, залежить як від модулів пружності матеріалу ущільнених (поверхневих), так і внутрішніх шарів матеріалу деталі, а також від моменту інерції поперечного перерізу балки-смужки.

Деформована частина балки-смужки, попереду від рухомого штампа, набуває «синусоподібної» форми, і переміщується в бік штампа у вигляді рухомої хвилі деформації довжиною  $l$  ( $l_2$ ) зі швидкістю  $V_0$ .

**Параметричні ефекти попереду від рухомого штампа.** Після визначення невідомих параметрів попереду від штампа, що рухається, розглянемо виникнення параметричних коливань на ділянці балки ( $l_2$ ) перед підходом

штампа. Звертаючись до балки-смушки перед впровадженням штампа в її продовження видно, що ця ділянка навантажена дотичною силою, подібно до задачі Ейлера для шарнірно опертих шарів. Функція  $T$ , як це випливає з (3), або (4) є деякою періодичною функцією часу ( $t$ ).

Тоді вираз у квадратних дужках (4) є навантаженням, що збуджує автоколивання на майданчику взаємодії (контакту) двох деталей і параметричним навантаженням для ділянки балки-смушки ( $l_2$ ). А для рівняння балки-смушки при її поздовжньому вигині на ділянці ( $l_2$ ) дотичною силою  $T$ .

Параметричне навантаження під час періодичної дії сили може бути представлено у формі Мат'є-Хілла.

Рівняння Мат'є-Хілла в загальному випадку записується у вигляді:

$$y'' + \Omega^2[1 - 2\mu\Phi(t)] = 0, \quad (26)$$

де:  $y = y(t)$  – шукана функція;  $\Omega$  – власна частота коливань системи;  $\mu$  – малий параметр;  $\Phi(t)$  – періодична функція Мат'є-Хілла.

Розглядаючи навантаження у виразі (14) як параметричне для ділянки балки ( $l_2$ ) попереду штампа, схильної до поздовжнього вигину, доходимо висновку, що доданок  $a \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^3$  відповідає параметричному навантаженню у формі Мат'є-Хілла.

При цьому спостерігаємо наступний механізм взаємодії передньої кромки штампу з поверхневим шаром протяжної деталі. В результаті набігання штампу на протяжну деталь, під дією власної ваги відбувається просідання поверхневих шарів матеріалу під штампом, тому передня кромка штампу частково прогинає зону під штампом і здійснює передачу дотичного зусилля на тонкий поверхневий шар (див. рис. 1). Вважаючи поверхневі шари деталей в результаті стиснення вздовж поздовжньої осі балкою-смушкою (за межами штампу) запишемо рівняння для динамічної поздовжньої стійкості балки-смушки, підкріпленої пружною основою та навантаженою дотичною силою, що виникає на майданчику контакту. Зазначене навантаження з боку взаємодіючих майданчиків контакту представлені як розподілене по майданчику і є автоколивальним, а від передньої грані штампу, для поверхневих шарів балки-смушки розподілена по довжині ребра контакту є параметричним. Перший доданок функції навантаження  $f_0$  представляє постійну частину навантаження (критичне навантаження). Другий доданок представляє змінну частину дотичного навантаження (змінюється за законом косинуса і найчастіше є негативним загасанням), що призводить до коливань зовнішніх шарів і відповідає параметричному навантаженню типу Мат'є. Третій доданок виразу (14) є параметричним навантаженням типу Мат'є-Хілла (при розгляді сили тертя).

Розглянемо складові сили тертя (14) з іншого боку.

Постійна частина критичного навантаження може викликати втрату поздовжньої стійкості поверхневих шарів балки-смушки. Якщо  $T > T_{кр}$ , то дотичне навантаження  $T$  призводить до втрати поздовжньої стійкості поверхневих шарів балки-смушки.

Доданок пропорційний швидкості прослизання елементів  $\frac{\partial y}{\partial t}$  є негативним згасанням у системі з «сухим» тертям. Це доданок привносить додаткову коливальну енергію до системи двох взаємодіючих деталей.

Доданок пропорційний третьому ступеню швидкості прослизання деталей  $\bar{b} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^3$ . Це складова при зростанні швидкості взаємного прослизання знижує зростання автоколиваний в системі, може настати момент, коли при зростанні швидкості прослизання коливання стають неможливими. Таким чином, сумарне параметричне навантаження, представлене в квадратних дужках (14), може викликати параметричні коливання балки-смужки (збудження коливань залежить від співвідношення доданків у квадратних дужках).

Таке уявлення сил тертя узгоджується з бінарною характеристикою тертя І.В. Крагельського [2], де коефіцієнт тертя виражений у вигляді суми адгезійної та деформаційної складових (і може бути описаний за аналогією з параметричним навантаженням у формі Матсьє-Хілла).

Закон тертя, представлений правою частиною (14) містить першу, другу та третю складову, відповідає силовому навантаженню у формі характеристики Матсьє-Хілла. Навантаження для балки-смужки згідно бінарного закону тертя може бути апроксимоване у вигляді (14). При цьому, у разі роботи сил тертя на майданчику контакту по спадаючій гілці характеристики тертя (рис. 2) спостерігається розгойдування автоколиваний, їх амплітуди зростатимуть, доки не буде збільшена швидкість прослизання деталей до значень, при яких будуть знижені амплітуди наростання коливань за рахунок нелінійного доданку  $\bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^3$ .

Для подальшого дослідження рішення рівняння (3) або (4) можна використовувати підстановку (7) і навести вихідне рівняння з частковими похідними на вигляд  $Y = Y(x)$ . Це рівняння може бути вирішене за методом варіації параметрів [8], однак такий прийом не підвищить точності рішення, тому обмежимося наближеним рішенням (14). У цьому рішенні використовуємо силову складову, яка є навантаженням, розподіленим за площею контакту деталей. Це навантаження обчислимо для граничної точки майданчика – т. А.

Як випливає з формул (4), (13), дотичне зусилля запишемо у вигляді:

$$T(x, t) = \frac{Pm_1}{\beta b l} \left[ f_0 - aV_0 \cos(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{m_1 p^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{m_1 p^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right) + \left( \bar{b} V_0 \cos(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{m_1 p^2 - \beta}{EF}} \cdot l\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{m_1 p^2 - \beta}{EF}} \cdot x\right) \right)^3 \right] \quad (27)$$

Розглянемо динамічне навантаження балки смужки попереду від штампу, що рухається. Вважаючи балку-смужку зовнішнім шаром деталі, навантаженою дотичним зусиллям  $T$  і зігнутою по синусоїді, з утворенням  $n$  напівхвиль на довжині балки-смужки  $l_2$  (рис. 1).

Звернемося до виразу (27) для балки-смужки (її частини), розташованої зараз на площині контакту. Вважатимемо, що балка-смужка в т.  $A$  (по осі  $Ox$  передає зусилля  $T$  на ділянку балки-смужки), вільну від дії штампу  $l_2$ . Тобто ділянка балки-смужки попереду від дії штампу знаходиться під впливом зусилля  $T$ , яке реалізується в т.  $A$  навантаженого шару деталі, при  $x = l$ , тоді:

$$T = T_A(x, t) = \frac{Pm}{\beta b l} \left[ f_0 - a \xi_{max} V_0 \cos(pt) + (b \xi_{max} V_0 \cos(pt))^3 \right]. \quad (28)$$

У разі передачі поздовжнього зусилля  $T(T_A)$  на ділянці балки-смужки ( $l_2$ ) перед штампом вираз (28) вписується в диференціальне рівняння (тобто вираз  $T = T_A$  сприймаємо як граничне значення  $T$  на майданчику контакту)

$$E_c I \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \beta V + T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad (29)$$

де:  $V(x, t)$  – поперечний прогин балки-смужки при поздовжньому вигині;  $\beta$  – коефіцієнт відсічі пружної основи.

Шукану функцію прогину  $V(x, t)$  представимо у формі Фур'є:

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \zeta_k(t), \quad (30)$$

де:  $k = 1, 2, 3, \dots$

Як функцію  $V(x, t)$  використовуємо вираз (де обрана зручна власна форма):

$$V(x, t) = \zeta_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{l} \cdot x\right), \quad (31)$$

де:  $\zeta_k(t)$  – тимчасова складова функції втрати стійкості з індексом  $k$  для балки-смужки;  $V_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} \cdot x\right)$  – форма втрати стійкості балки-смужки з індексом  $k$ . Обрана функція задовольняє вихідне рівняння та граничні умови, тому може бути встановлена при подальшій роботі з функціями часу. У ряді випадків  $z_k$  може бути прийнято у вигляді  $z_k = A_k = \text{const}$ .

Після підстановки виразів (28), (31) до рівняння (29) отримаємо:

$$E_c I \cdot \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \zeta_k(t) + m \ddot{\zeta}_k(t) + \beta \zeta_k(t) - T \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \zeta_k(t) = 0, \quad (32)$$

або

$$\ddot{\zeta}_k(t) + \left[ E_c I \cdot \frac{k^4 \pi^4}{m l^4} + \frac{\beta}{m} - T \cdot \frac{k^2 \pi^2}{m l^2} \right] \zeta_k(t) = 0. \quad (33)$$

Зазначимо, що кожному значенню  $k = 1, 2, 3, \dots$  відповідає своя тимчасова складова  $\zeta_k(t)$  функції  $V(x, t)$ .

Якщо підставити вирази (28), (31) замість  $V(x, t)$  в (29), то отримаємо:

$$\ddot{\zeta}_k + \left[ \frac{k^4 \pi^4}{m l^4} + \frac{\beta}{m} + \frac{k^2 \pi^2}{m l^2} \cdot \frac{Pm}{\beta b l} \cdot f_0 - \frac{k^2 \pi^2}{m l^2} \cdot \frac{Pm}{\beta b l} \cdot a V_0 \xi_{max} \cos(pt) + \frac{k^2 \pi^2}{m l^2} \cdot \frac{Pm}{\beta b l} \times \right. \\ \left. \left( b \xi_{max} V_0 \cos(pt) \right)^3 \right] \zeta_k = 0 \quad (34)$$

Перетворене рівняння (33) у формі (34) приведемо до виду рівняння Мат'є-Хілла або до зручного застосування методу варіації параметрів. Введемо позначення кожної власної частоти коливань

$$\omega_{0k}^2 = \frac{k^4 \pi^4}{m l^4} + \frac{\beta}{m} + \frac{k^2 \pi^2}{m l^2} \cdot \frac{Pm}{\beta b l} \cdot f_0, \quad (35)$$

де:  $k = 1, 2, 3, \dots$

Величина зворотна  $\omega_{0k}^2$ :

$$\frac{1}{\omega_{0k}^2} = \frac{m l_2^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2}{k^4 \pi^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + \beta \cdot m l_2^4 \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + k^2 \pi^2 P m f_0 \cdot m l_2^4 \cdot m}, \quad (36)$$

Також введемо позначення:

$$\alpha_k = a V_0 \xi_{max} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P m}{\beta b l_2} \cdot \frac{m l_2^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2}{k^4 \pi^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + \beta \cdot m l_2^4 \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + k^2 \pi^2 P m f_0 \cdot m l_2^4 \cdot m}, \quad (37)$$

$$\bar{\beta}_k = (\bar{b} V_0 \xi_{max})^3 \cdot \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P m}{\beta b l_2} \cdot \frac{m l_2^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2}{k^4 \pi^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + \beta \cdot m l_2^4 \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + k^2 \pi^2 P m f_0 \cdot m l_2^4 \cdot m}, \quad (38)$$

де:  $a, \bar{b}$  – коефіцієнти характеристики тертя див. (4).

Остаточно приходимо до рівняння для знаходження часової частини функції  $V(x, t)$ :

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_{0k}^2 \left[ 1 - a V_0 \xi_{max} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P m}{\beta b l_2} \cdot \frac{m l_2^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2}{k^4 \pi^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + \beta \cdot m l_2^4 \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + k^2 \pi^2 P m f_0 \cdot m l_2^4 \cdot m} \cdot \cos(pt) + \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P m}{\beta b l_2} \times \left( b \xi_{max} V_0 \cos(pt) \right)^3 \cdot \frac{m l_2^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2}{k^4 \pi^4 \cdot m \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + \beta \cdot m l_2^4 \cdot m l_2^2 \beta b l_2 + k^2 \pi^2 P m f_0 \cdot m l_2^4 \cdot m} \right] \zeta_k = 0 \quad (39)$$

Використовуючи вирази (34), (36), (37), (38) приходимо до рівняння (40):

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_{0k}^2 [1 - \alpha_k \cdot \cos(pt) + \bar{\beta}_k \cdot \cos^3(pt)] \zeta_k = 0. \quad (40)$$

Наближене рішення (40) розглянемо методом варіації параметрів [9]. Відповідно до методу, рішення (40) зводиться до розв'язання аналогічного рівняння:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + \mu \varphi(t)] x = 0, \quad (41)$$

де:  $\omega_0$  – власна частота коливань для допоміжного рівняння;  $x$  – допоміжна координата;  $\mu$  – деякий малий параметр (приймають у межах  $0 < \mu \leq 1$ );  $\varphi(t)$  – деяка (періодична функція) функція часу.

Для вирішення рівняння (41) за методом варіації параметрів необхідно виконання умов:

$$0 < \mu \leq 1 \text{ и } \left| \frac{d\varphi}{dt} / \varphi \right| \div (\omega_0 / 2\pi) \ll 1. \quad (42)$$

Якщо рівняння (42) виконується, то представимо (40) у формі Каннінгхема [8]

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_{0k}^2 [1 + \mu \varphi(t)] \zeta_k = 0. \quad (43)$$

Відповідно до [8] породжувальне рішення запишемо у формі:

$$\zeta_k = \bar{A}_k \cos(\omega_{0k} t + \Theta_k) = \bar{A}_k \cos \Psi, \quad (44)$$

де:  $\Psi = \omega_{0k} t + \Theta_k$ ;  $\bar{A}_k, \Theta_k$  – параметри, що підлягають варіації ( $\bar{A}_k$  – амплітуда деформаційних хвиль для  $k$ - гармоніки;  $\Theta_k$  – початкова фаза для гармоніки з індексом  $k$ ).

Відповідно до алгоритму рішення [9] виконаємо дії:

$$\frac{d\bar{A}_k}{dt} = \mu_k \omega_{0k} \bar{A}_k \varphi_k(t) \sin \Psi_k \cos \Psi_k, \quad (45)$$



$$\frac{d\Theta_k}{dt} = \mu_k \omega_{0k} \varphi_k(t) \cos^2 \psi_k. \quad (46)$$

Тоді згідно з методом [9]

$$\bar{A}_k = B_k \exp \left[ \frac{\mu \omega_{0k}}{2} \int \varphi_k(t) \sin(2\psi_k) dt \right]. \quad (47)$$

В умовах (46) кут  $\Theta_k$  мало змінюється протягом циклу коливань і тому його можна вважати постійним.

Оскільки виконується (42), можна записати наближену рівність:

$$\int \varphi_k(t) \sin(2\psi_k) dt = -\frac{\varphi_k(t)}{2\omega_{0k}} \cos(2\psi_k). \quad (48)$$

Тому:

$$\bar{A}_k = B_k \exp \left[ -\frac{\mu}{4} \varphi_k(t) \cos(2\psi_k) \right]. \quad (49)$$

Рівність (49) виражає коливання амплітуд із частотою, що визначається кутом  $2\psi_k = 2(\omega_{0k}t + \Theta_k)$ .

За умов, накладених на  $\frac{\mu}{4} \varphi_k(t)$  Амплітуда може відчувати лише малі зміни за кожен цикл коливань. Має сенс розглядати значення  $\bar{A}_k$  лише в момент, коли  $\zeta_k(t)$  досягає максимуму, вважаючи, що протягом найближчого періоду  $\bar{A}_k$  будуть зберігати те саме значення.

З виду рішення, що породжує, слідує, що максимальне значення  $\zeta_k(t)$  відповідають  $\cos(2\psi_k) = +1$ , тоді рівняння для амплітуд набувають вигляду:

$$\bar{A}_k = B_k \exp \left[ -\frac{\mu}{4} \varphi_k(t) \right] \approx B_k \left[ 1 - \frac{\mu}{4} \varphi_k(t) \right], \quad (50)$$

де:  $B_k$  – довільна постійна, яка визначається з початкових умов і трактується в нашому випадку як початкове усунення.

Для визначення змін  $\Theta_k$  достатньо скористатися середнім значенням за цикл коливань

$$\left( \frac{d\Theta_k}{dt} \right)_{cp} = \frac{\mu_k \omega_{0k}}{2} \varphi_k(t), \quad (51)$$

тоді

$$\begin{aligned} \Theta_k &= \frac{\mu_k \omega_{0k}}{2} \int [-\alpha_k \cdot \cos(pt) + \bar{\beta}_k \cdot \cos^3(pt)] dt = \\ &= \frac{\mu_k \omega_{0k}}{2p} (-\alpha_k) \sin(pt) + \frac{\mu_k \omega_{0k}}{2p} \bar{\beta}_k \left( \frac{1}{p} \sin(pt) - \frac{1}{3p} \sin^3(pt) \right) = -\frac{\mu_k \omega_{0k} \alpha_k}{2p} \sin(pt) + \\ &+ \frac{\mu_k \omega_{0k}}{2p^2} \bar{\beta}_k \left( \sin(pt) - \frac{\sin^3(pt)}{3} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

Рівняння амплітуд набуде вигляду

$$\bar{A}_k = B_k \left[ 1 - \frac{\mu}{4} \left( -\alpha_k \cdot \cos(pt) + \bar{\beta}_k \cdot \cos^3(pt) \right) \right]. \quad (53)$$

Вибираємо  $\mu = 1$ .

Використовуючи прийняті позначення, знайдемо екстремальне значення (53)  $\bar{A}_k$ , за формулами (44) та (53). Обчислимо  $\bar{A}'_k$  і прирівняємо значення похідної нулю

$$\bar{A}'_k = B_k [-\alpha_k p \cdot \sin(pt) + 3\bar{\beta}_k \cdot \cos^2(pt) \cdot \sin(pt)], \quad (54)$$

звідки

$$\cos^2(pt) = \frac{\alpha_k}{3\beta_k}; \cos(pt) = \sqrt{\frac{\alpha_k}{3\beta_k}}. \quad (55)$$

Тоді вираз для екстремального значення амплітуди запишемо

$$m\bar{A}_k = B_k \left[ 1 + \alpha_k \cdot \sqrt{\frac{\alpha_k}{3\beta_k}} - \beta_k \cdot \left( \sqrt{\frac{\alpha_k}{3\beta_k}} \right)^3 \right]. \quad (56)$$

Перетворимо вираз (56) для  $m\bar{A}_k$ , яке зведеться до вигляду

$$m\bar{A}_k = B_k \left[ 1 + \frac{2}{3} \alpha_k \cdot \sqrt{\frac{\alpha_k}{3\beta_k}} \right] \quad (57)$$

або у розгорнутій формі

$$m\bar{A}_k = B_k \left[ 1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\alpha^2}{\bar{b}^2 V_0 \xi_{max}} \cdot \frac{k^2 \pi^2 P m \cdot m l_2^2 m^2 \beta b l_2}{(m^2 l_2 \beta b l_2 + \beta^2 m^2 l_2^4 b l_2 + k^2 \pi^2 P m \beta b l_2 f_0)} \right] \quad (58)$$

Формула (58) дозволяє обчислити амплітуди деформаційних хвиль (з індексом  $k$ ), в зоні, що випереджає штамп, що рухається. Отримана раніше формула (16) дозволяє обчислити амплітуду деформаційної хвилі менш точним способом. При цьому обчислення виконуються за більш простою формулою з використанням довжини деформованої ділянки  $l_2$ , поздовжнього переміщення ділянки контакту під штампом  $\xi$ , числа напівхвиль  $n$  на довжині деформованої за синусоїдою ділянки  $l_2$ .

Звернемося до диференціального рівняння (40), за виразом у квадратних дужках можна будувати висновки про наявність чи відсутність параметричних коливань у системі. Якщо вираз у квадратних дужках дорівнює 0, то коливання відсутні. Для оцінки можливості виникнення коливань, прирівняємо нулю вираз у квадратних дужках, тоді отримаємо трансцендентне рівняння щодо  $\cos^3(pt)$ :

$$\cos^3(pt) - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \cos(pt) + \frac{1}{\beta_k} = 0 \quad (59)$$

Введемо позначення  $\cos(pt) = \eta$ , тоді від трансцендентного рівняння переходимо до алгебраїчного:

$$\eta^3 - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \eta + \frac{1}{\beta_k} = 0 \quad (60)$$

Розв'яжемо (60) за методом Кардано щодо дійсного кореня

$$\eta_1 = u + v; u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2\beta_k} + \sqrt{\frac{1}{4\beta_k^2} + \left(\frac{\alpha_k}{3\beta_k}\right)^2}}; v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2\beta_k} - \sqrt{\frac{1}{4\beta_k^2} + \left(\frac{\alpha_k}{3\beta_k}\right)^2}} \quad (61)$$

$$\frac{k\pi}{2} = \eta_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2\beta_k} + \sqrt{\frac{1}{4\beta_k^2} + \left(\frac{\alpha_k}{3\beta_k}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2\beta_k} - \sqrt{\frac{1}{4\beta_k^2} + \left(\frac{\alpha_k}{3\beta_k}\right)^2}} \quad (62)$$

Якщо корінь  $\eta_1$  приймає значення  $\frac{k\pi}{2}$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$  – номер форми коливань балки-смужки, то параметричні коливання балки-смужки відсутні.

При розгляді параметричних коливань важливим залишається питання визначення діапазону частот, у якому наступають нестійкі стани системи, де розвиваються параметричні коливання і резонанс (параметричний). Як було раніше показано критичний стан настає, коли параметричне навантаження має вигляд функції Мат'є (і за модулем дорівнює або перевершує силу Ейлера) [10]. Так як друга частина параметричного навантаження у формі Хіла на розвиток параметричних коливань та резонансу не впливає, то при визначенні критичних

частот орієнтуватиметься на рішення та результати, отримані при вирішенні рівняння Мат'є [6].

Тому, шляхом підстановки тригонометричного ряду в рівнянні Мат'є отримана формула для визначення частоти виникнення параметричного резонансу, і область динамічної нестійкості розташовується навколо частоти, що параметрично збуджуються.

$$\Theta_* = \frac{2\omega_0}{k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (63)$$

де  $\Theta_*$  – частота параметричного резонансу;  $\omega_0$  – власна частота коливань балки-смужки при поздовжньому вигині;  $k = 1, 2, 3, \dots$  – номер згинальної форми коливань балки-смужки. Таким чином, головний параметричний резонанс настає при співвідношенні частот  $\Theta_* = 2\omega_0$ , тобто коли  $k = 1$ .

Зауважимо, що деформаційно-хвильові мікронерівності виникають у взаємодіючих деталях навіть при невисоких швидкостях переміщення, причому такі мікронерівності відразу після їх виникнення можуть бути зім'яті штампом, що рухається. Тому деформаційні мікронерівності навіть за відсутності параметричного резонансу та роботи в пружній області схильні до безперервних знакозмінних деформацій, тобто поверхневі шари деталей перебувають у стані багатоциклових втомних навантажень. Причому амплітуди коливань деформаційних хвиль поверхневих шарів перевищують відповідні амплітуди коливань підповерхневих шарів. Тому такі деформації сприяють відриву зовнішніх шарів деталей від внутрішніх шарів (рис. 4).

Внутрішні шари матеріалу деталей добре сприймають деформації стиснення і недостатньо добре – деформацію розтягування, тому на ділянках розтягування волокон зовнішніх шарів та волокон пружної основи спостерігається граничне тріщиноутворення та локальне руйнування, що призводить до інтенсивного зношування зовнішніх шарів деталей при фрикційному.

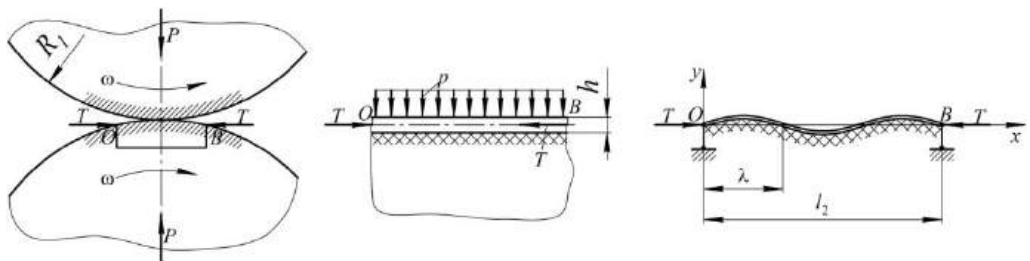


Рис. 4. Гіпотетична балка в поверхневих шарах деталі:

- а) контактуючі деталі; б) поверхневий шар в зоні контакту до деформації;  
 в) поверхневий шар в зоні контакту після деформації пружної (або остаточної)  
 $P$  – Зусилля притискання;  $p$  – розподілене навантаження;  $T$  – дотичне зусилля;  
 $h$  – товщина балки-смужки

## Висновки

1. У роботі обґрунтовано роль параметричних та автоколивальних процесів при взаємодії деталей у поверхневих шарах на розвиток багатоциклових напружень та деформацій на ділянках балки-смужки під штампом та попереду штампу.

2. Для опису коливальних і перехідних процесів при взаємодії деталей або інструменту із заготівлею застосовано розрахункову модель, в якій поверхневі

шари деталей представлені у вигляді анізотропної пластини на пружній підставі, навантаженою дотичною силою, обумовленою нестационарним тертям між деталями, що часто перевищує критичне зусилля Ейлера.

3. Досліджено причини виникнення динамічно нестійких станів балки-смужки, при якій можливі порушення цілісності поверхневих шарів заготовки та деталі за рахунок виникнення закритичних напруг та деформацій у матеріалі зовнішніх шарів взаємодіючих деталей.

4. Отримано результати визначення небезпечних станів поверхневих шарів деталей або заготовки при дії нестационарних навантажень у початкові моменти взаємодії, а також у моменти закінчення ефекту прослизання або в моменти вирівнювання швидкостей руху деталей при коливаннях.

5. У роботі поставлена і вирішена третя динамічна задача для поверхневих шарів заготовки, представлених у вигляді балки-смужки на пружній підставі, навантаженою дотичною силою, обумовленою нестационарним тертям в зоні контакту деталей (під штампом) і в зоні балки-смужки перед штампом. Ця сила може значно перевищувати своє критичне значення та викликати пошкодження та передчасне зношування поверхневих шарів. При цьому визначені області динамічної нестійкості поверхневих шарів.

6. Практичне значення проведених досліджень полягає в тому, що виявлено режими експлуатації гірничих, металургійних, транспортних машин та параметри фрикційних пар, що взаємодіють, при яких можуть бути отримані умови виникнення станів поверхневих шарів, що не забезпечують високих експлуатаційних якостей цих машин.

### Список літератури

1. Смирнов В.В., Яковлев Р.Л. Механика приводов прокатных станов. М.: «Металлургия», 1977. 216 с.
2. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: «Машиностроение», 1977. 526 с.
3. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Под ред. В.Н. Челомея. М.: «Машиностроение», 1979. Т.2: Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмона, 1979. 351 с.
4. Учитель А.Д., Малиновский Ю.А., Панченко А.Н., Дворецкий Д.Н., Омельченко Е.В., Даценко С.Ю. Интенсификация процессов механического взаимодействия инструмента с заготовкой при выполнении высокоточных и энергоемких технологических операций методами давления и резания. *Металлургическая и горнорудная промышленность*. Днепр. 2019. № 5 – 6. С. 96-116.
5. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. М.: «Высшая школа», 1973. 456 с.
6. Учитель А.Д., Малиновский Ю.А., Данилина Г.В., Даценко С.Ю., Омельченко Е.В. Влияние параметрического резонанса на механизм разрушения контактирующих поверхностей при трении и изнашивании. *Металлургическая и горнорудная промышленность*. Днепр. 2018. № 4. С. 65-73.
7. Малиновский Ю.А., Дубровский С.С., Малиновская С.И. Деформационно-волновые эффекты при трении твердых тел. *Металлургическая и горнорудная промышленность*. Днепр. 2017. № 2. С. 66-71.
8. Малиновський Ю.О., Власенков Д.П., Ситник С.О., Терьошина С.С., Олійник С.Ю. Трактвання енергетичних методів у теорії тертя та зношування з позиції механіки суцільних середовищ та теорії дислокацій. *Проблеми тертя та зношування*. Київ. 2023. № 4. С. 97-120. DOI: 10.18372/0370-2197.4(101).18083

9. Маліновський Ю.О., Власенков Д.П., Цвіркун С.Л., Олійник С.Ю. Термомеханічні явища в поверхневих шарах контактуючих деталей при терті та зношуванні. *Проблеми тертя та зношування*. Київ. 2023. № 2. С. 39-64. DOI: 10.18372/0370-2197.2(99).17625

10. Малиновский Ю.А., Учитель А.Д., Лялюк В.П. и др. Параметрический анализ фрикционных автоколебаний при взаимодействии деформирующего инструмента с заготовкой. *Сталь*. № 1. 2021. С. 40-50.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2024.

**Маліновський Юрій Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: [malinovsky129@gmail.com](mailto:malinovsky129@gmail.com), тел.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>

**Мікосянчик Оксана Олександрівна** – докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри прикладної механіки та інженерії матеріалів, Національний авіаційний університет, пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058, тел.: +38 044 406 77 70, E-mail: [oksana.mikos@ukr.net](mailto:oksana.mikos@ukr.net), <https://orcid.org/0000-0002-2438-1333>

**Власенков Дмитро Петрович** – старший викладач, заступник директора, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, E-mail: [vlaskov.d@gmail.com](mailto:vlaskov.d@gmail.com), тел.: +38 067 296 71 75.

**Ситник Сергій Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045.

**Рибак Дмитро Петрович** – старший викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, тел.: +38 097 901 63 51.

**Олійник Світлана Юрївна** – старший викладач кафедри технології машинобудування Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна, E-mail: [olynik.syu@knu.edu.ua](mailto:olynik.syu@knu.edu.ua), тел.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>

**Березівський Назарій Миколайович** – аспірант кафедри прикладної механіки та інженерії матеріалів, Національний авіаційний університет, пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058, E-mail: [5283404@stud.nau.edu.ua](mailto:5283404@stud.nau.edu.ua), <https://orcid.org/0009-0007-7657-0367> .

*Yu. MALINOVSKIY, O. MIKOSIANCHYK, D. VLASENKOV, S. SYTNIK, D. RYBAK, S. OLIYNYK, N. BEREZIVSKIY*

### **PARAMETRIC AND AUTO-STEWED PROCESSES IN THE SURFACE LAYERS OF PARTS AS EXTERNAL SOURCES OF THEIR DESTRUCTION DURING FRICTION AND WEAR**

During the execution of various technological processes and the operation of general-purpose actuators, oscillatory movements may occur that are excited without a source of oscillatory motion. These oscillations usually occur either in the area where the two parts come into contact or in the area ahead of the leading edge of the moving part. The oscillatory nature of the movements in the contact area of the parts and the area ahead of the leading edge of the moving part have different physical nature. Thus, in the area of interaction of parts (on the contact pad), oscillatory movements occur due to the unsteady characteristic of friction, which depends on the sliding speed of the parts. At certain ratios of sliding speeds, self-oscillatory motions can appear or disappear, as well as be strengthened or weakened. These oscillations are one of the causes of unregulated roughness, (deformation) cracking and peeling of interacting parts, as well as significant dynamic components during loading of actuators, drives and power mechanisms. Self-oscillations in the surface layers of parts with deformation wave formation, which leads to further destruction in these layers, ahead of the front edge of the die due to the formation of residual plastic waves and subsequent destruction of their crests. Due to the dynamic nature of the interaction between the parts during friction, the force acting on the contact line between the die and the extended part exceeds the critical Euler force and is actually a parametric load, accompanied by the phenomenon of parametric resonance, which usually has a more dangerous effect than the usual resonance during forced vibrations. Therefore, the destruction of the surface layer of parts under parametric resonance is more significant. The main vibration frequency at which parametric resonance occurs is equal to twice the frequency of bending vibrations of the beam-strip. The frequency region near the parametric resonance frequency is the main area of dynamic instability ahead of the moving die.

In this problem, we consider frictional self-oscillations in the area under the die, which are a source of loss of dynamic stability in the area in front of the die, development of parametric vibrations of the surface layers of parts and a number of cases of parametric vibrations and parametric resonance of the outer layers of parts that are destroyed during interaction.

The connection between frictional and parametric vibrations is established through two adjacent sections of the beam-strip in its stretched and compressed parts.

**Key words:** friction, wear, friction fluctuations, auto-fluctuations, baking beam, parametric vibrations, parametric resonance, main area of instability, stamp, long-standing part, friction force, speed, slipping, surface layers.

### **References**

1. Smirnov V.V., Yakovlev R.L. *Mekhanika privodov prokatnikh stanov.* M.: «Metallurgiya», 1977. 216 s.
2. Kragelskii I.V., Dobichin M.N., Kambalov V.S. *Osnovi raschetov na trenie i iznos.* M.: «Mashinostroenie», 1977. 526 s.
3. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v 6-ti tomakh.* Pod red. V.N Chelomeya. M.: «Mashinostroenie», 1979. T.2: *Kolebaniya nelineinikh mekhanicheskikh sistem / pod red. I.I. Blekhmona*, 1979. 351 s.
4. Uchitel A.D., Malinovskii Yu.A., Panchenko A.N., Dvoretiskii D.N., Omelchenko Ye.V., Datsenko S.Yu. *Intensifikatsiya protsessov mekhanicheskogo vzaimodeistviya instrumenta s zagotovkoi pri vipolnenii visokotochnikh i energoemkikh tekhnologicheskikh operatsii metodami davleniya i rezaniya. Metallurgicheskaya i gornorudnaya promishlennost.* Dnepr. 2019. № 5 – 6. S. 96-116.

5. Svetlitskii V.A., Stasenکو I.V, Sbornik zadach po teorii kolebanii. M.: «Visshaya shkola», 1973. 456 s.

6. Uchitel A.D., Malinovskii Yu.A., Danilina G.V., Datsenko S.Yu., Omelchenko Ye.V. Vliyanie parametricheskogo rezonansa na mekhanizm razrusheniya kontaktiruyushchikh poverkhnostei pri trenii i iznashivanii. Metallurgicheskaya i gornorudnaya promishlennost. Dnepr. 2018. № 4. S. 65-73.

7. Malinovskii Yu.A., Dubrovskii S.S., Malinovskaya S.I. Deformatsionno-volnovie effekti pri trenii tverdikh tel. Metallurgicheskaya i gornorudnaya promishlennost. Dnepr. 2017. № 2. S. 66-71.

8. Malinovskiy Yu.O., Vlasenkov D.P., Sytnyk S.O., Teroshyna S.S., Oliinyk S.Yu. Traktuvannya enerhetychnykh metodiv u teorii tertia ta znoshuvannya z pozytsii mekhaniky sutsilnykh seredovyshch ta teorii dyslokatsii. Problemy tertia ta znoshuvannya. Kyiv. 2023. № 4. S. 97-120. DOI: 10.18372/0370-2197.4(101).18083

9. Malinovskiy Yu.O., Vlasenkov D.P., Tsvirkun S.L., Oliinyk S.Yu. Termomekhanichni yavyscha v poverkhnevyykh sharakh kontaktuiuchykh detalei pry terti ta znoshuvanni. Problemy tertia ta znoshuvannya. Kyiv. 2023. № 2. S. 39-64. DOI: 10.18372/0370-2197.2(99).17625

10. Malinovskii Yu.A., Uchitel A.D., Lyalyuk V.P. i dr. Parametricheskii analiz friktsionnikh avtokolebanii pri vzaimodeistvii deformiruyushchego instrumenta s zagotovkoi. Stal. № 1. 2021. S. 40-50.

**Malinovskiy Yurii Olexandrovych** – candidate of technical sciences, associate professor, Separated structural subdivision «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: [malinovskiy129@gmail.com](mailto:malinovskiy129@gmail.com), tel.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>

**Mikosianchuk Oksana Olexandrivna** - Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mechanics and Materials Engineering, National Aviation University, 1 Lubomyra Huzar Ave., Kyiv, Ukraine, 03058, E-mail: [oksana.mikos@ukr.net](mailto:oksana.mikos@ukr.net), <https://orcid.org/0000-0002-2438-1333>

**Vlasenkov Dmyro Petrovych** – senior teacher, head's assistant, Separated structural subdivision «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: [vlasenkov.d@gmail.com](mailto:vlasenkov.d@gmail.com), tel.: +38 067 296 71 75.

**Sytnyk Serhii Olexandrovych** - Head of department, Separated structural subdivision «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: [sytnykteacher@gmail.com](mailto:sytnykteacher@gmail.com), tel.: +38 097 930 69 24.

**Rybak Dmitro Petrovich** – senior teacher, Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, tel.: +38 097 901 63 51

**Oliinyk Svitlana Yuriiivna** – senior lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology Krivyi Rih National University, Krivyi Rih, Vitaly Matusevicha 11, Ukraine, 50027, E-mail: [olynik.syu@knu.edu.ua](mailto:olynik.syu@knu.edu.ua), tel.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>

**Berezivskiy Nazarii Mykolayovych** – is a graduate student at the Department of Applied Mechanics and Materials Engineering, National Aviation University, 1 Lubomyra Huzar Ave., Kyiv, Ukraine, 03058, E-mail: 5283404@stud.nau.edu.ua, <https://orcid.org/0009-0007-7657-0367>.